Il moto dei pianeti intorno al Sole

Luciano Ancora

La rivoluzione copernicana

Nella prima metà del XVI secolo, l'astronomo polacco Niccolò Copernico propose una sua teoria del moto dei pianeti su un sistema di orbite con il Sole al centro, opponendola alla concezione Tolemaica, che voleva invece la Terra al centro del sistema solare. L'idea non era del tutto nuova, già era stata espressa dai greci, ma Copernico ne diede una dimostrazione rigorosa, con procedimenti matematici. Tuttavia la sua teoria non era priva di difetti.

Copernico non sfruttò pienamente la sua idea di un sistema planetario centrato sul sole. Egli conservò, nella sua spiegazione matematica del nuovo sistema, una parte della concezione Tolemaica, per cui, oltre a considerare ancora orbite planetarie circolari, continuò a pensare che i piani orbitali dovessero intersecarsi nel centro dell'orbita terrestre.

Giovanni Keplero perfezionò il sistema matematico di Copernico, applicandovi rigorosamente la sua stessa teoria di un universo dominato dal Sole. Egli, assumendo che i piani delle orbite planetarie dovessero invece intersecarsi nel Sole, riuscì a trasformare il macchinoso sistema di Copernico in una tecnica estremamente semplice e precisa per calcolare la poszione dei pianeti.

Keplero, che aveva lavorato con Tycho Brahe, ebbe in eredità da costui una gran quantità dei più precisi dati mai raccolti sulle posizioni dei pianeti, e con questi si mise a studiare per dare una sistemazione alla teoria copernicana. Fu un lavoro enorme che occupò gran parte del tempo di Keplero per quasi dieci anni.

In una serie di tentativi senza successo, Keplero cercò di calcolare l'orbita del pianeta Marte e l'orbita della Terra, da cui Marte veniva osservato. Per fare questo, egli usò tutta una serie di combinazioni di circoli e figure ovali, ma nessuna di queste riuciva ad eliminare le discordanze fra la sua teoria sperimentale e le osservazioni. Poi, per caso, scoprì che teoria ed osservazioni potevano andare d'accordo se i pianeti si muovevano su orbite ellittiche, con velocità variabili secondo una semplice legge.

Keplero pensò che a spingere i pianeti lungo le loro orbite fosse una forza motrice, l'*anima motrix*, generata dal Sole, che doveva diminuire col crescere della distanza del pianeta dal Sole: ad una distanza doppia doveva corrispondere una forza dimezzata, e quindi una velocità orbitale inversamente proporzionale alla distanza dal Sole. Questa legge della velocità funzionava bene per piccole eccentricità, quali erano

quelle delle orbite planetarie, e nell'approssimazione delle misure astronomiche all'epoca di Keplero, quando i telescopi non esistevano ancora. Come vedremo, Isaac Newton formulò più tardi la legge esatta: quella della forza inversamente proporzionale al *quadrato* della distanza. (1)

L'impostazione di Keplero introduceva il concetto fisico di moti planetari regolati da forze, contro la concezione tradizionale dei moti "naturalmente" circolari. Occorreva quindi "spiegare" la natura delle forze di Keplero. Furono gli studi successivi svolti a tal fine, a condurre alla concezione newtoniana dell'universo, che diede alla rivoluzione copernicana il suo aspetto definitivo.

La sintesi Newtoniana

Nel 1674 Robert Hooke diede per primo una descrizione qualitativa dei fenomeni che regolano i moti celesti, postulando l'esistenza di due agenti fondamentali: l'*inerzia*, già introdotta da Descartes, che è la proprietà di un corpo di resistere ad una variazione del suo stato di moto, e la *forza di gravità* che è la forza di attrazione reciproca fra corpi qualsiasi.

Newton, che era già pervenuto da solo alla concezione qualitativa di Hooke, riuscì in seguito a risolvere quantitativamente i problema dei moti planetari, deducendo due conseguenze fisiche di estrema importanza. Se le velocità dei pianeti e i raggi delle loro orbite erano legati fra loro dalla terza legge di Keplero, allora l'attrazione che guidava i pianeti vero il Sole doveva diminuire in misura inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separava dal Sole. Inoltre, una legge quadratica di proporzionalità inversa poteva spiegare esattamente, sia le orbite ellitiche della prima legge di Keplero, sia la variazione di velocità descritta nella seconda legge.

Queste deduzioni matematiche, che non avevano precedenti nella storia delle scienze, saranno descritte dettagliatamente nel seguito.

La lezione perduta di Feynman

Questo paragrafo è una sintesi (in solo 7 pagine) del contenuto di un intero libro, di circa 200 pagine, su una lezione tenuta nel 1964 da Richard Feynman sull'argomento conclusivo del nostro articolo.

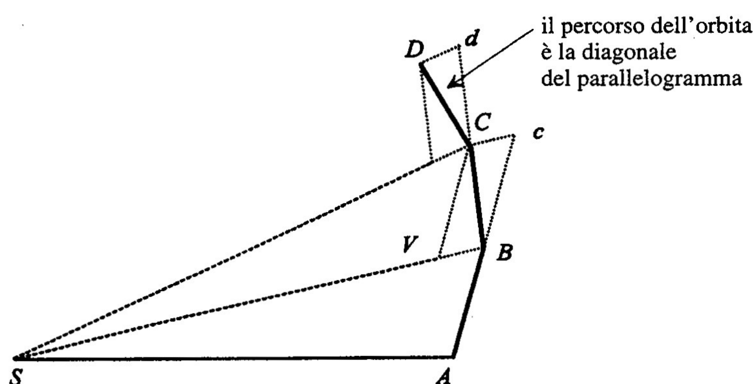
---

(1) Le due deduzioni quantitative viste in questo paragrafo si spiegano facilmente. Keplero deve aver considerato l'azione del Sole limitata al piano orbitale, con l'ìnfluenza distribuita uniformemente su circonferenze concentrche centrate sul Sole, per cui, raddoppiando il raggio l'azione risulterebbe dimezzata. Newton considera invece un'azione distribuita su superfici sferiche concentriche centrate sul Sole: su una sfera di raggio doppio, con superfice quadrupla, l'influenza unitaria si ridurrebbe a un quarto.

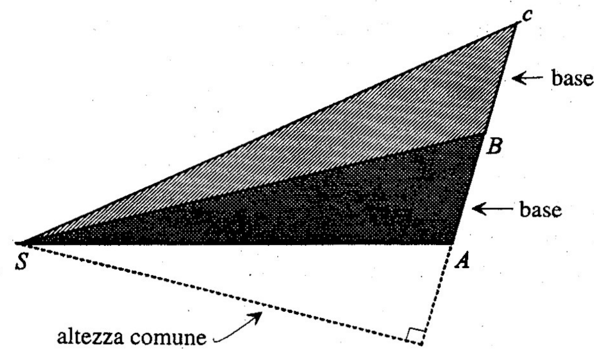
Prima di proseguire, ricordiamo le tre leggi fondamentali del moto planetario. Keplero affermava:

1 - I pianeti si muovono intorno al Sole lungo orbite ellittiche, con il sole in uno dei fuochi.
2 - L'area spazzata da un segmento tracciato dal Sole all'orbita è proporzionale al tempo impiegato a percorrerla.
3 - Pianeti diversi hanno periodi di rivoluzione che stanno ai rispettivi assi maggiori in un rapporto esponenziale pari a 3/2.

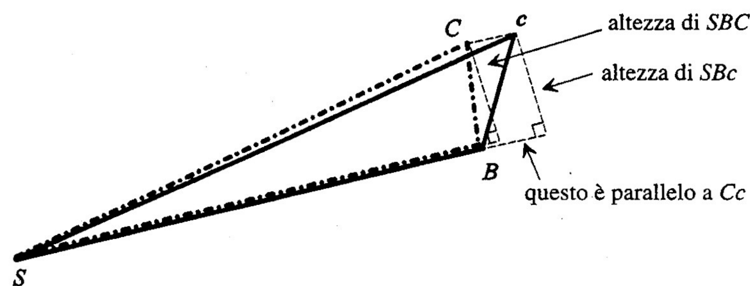
Nel suo libro Principia, Newton usò la seconda legge di Keplero per dimostrare che l'uguaglianza delle aree in tempi uguali equivale ad affermare che le forze agenti sui pianeti sono dirette verso il Sole. Newton rappresentò l'orbita con una serie di segmenti di moto inerziale, interrotti da bruschi cambiamenti di direzione dovuti all'applicazione della forza del Sole per brevi intervalli di tempo.



Nel primo intervallo di tempo, il pianeta si muoverebbe da *A* fino a *B*, se non ci fosse alcuna forza agente su esso. Nel successivo intervallo di tempo, di uguale durata, il pianeta continuerebbe a muoversi in linea retta per una uguale distanza *Bc*. Un impulso di forza, applicato nel punto *B*, genera una componente del moto diretta verso il Sole, *BV*. Componendo, si ha che il moto effettivo avviene lungo la diagonale *BC*. La stessa procedura si ripete per ogni punto successivo.
Newton dimostra che l'orbita del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali. In altre parole, il triangolo *SAB*, spazzato dal pianeta nel primo intervallo di tempo, ha la stessa area del triangolo *SBC*, spazzato nel secondo intervallo e così via.

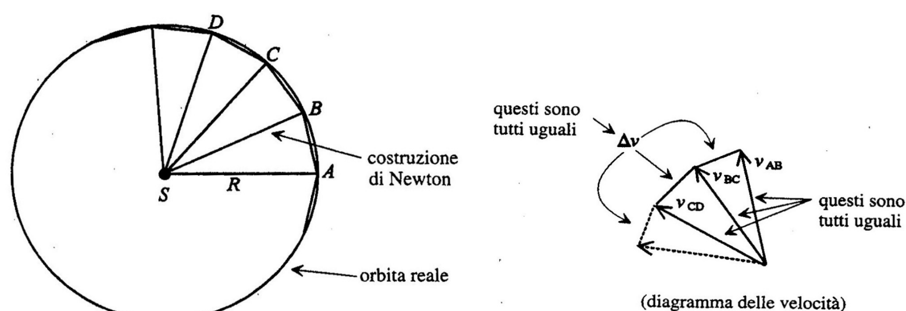


I due triangoli *SAB* e *SBc*, che formano le due aree, sono uguali, perché hanno le basi uguali e l'altezza relativa in comune.

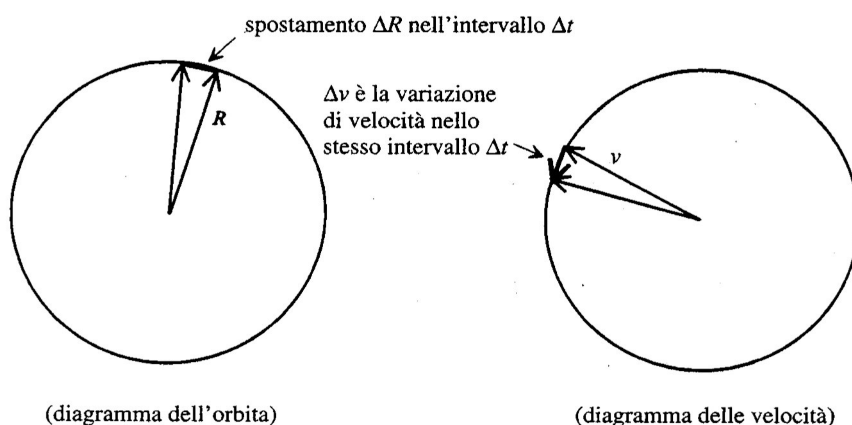


I due triangoli *SBC* e *SBc* hanno una base in comune e altezze uguali, perché giacciono fra rette parallele. Segue l'uguaglianza dei triangoli *SAB* e *SBC*, cioè: ***le aree spazzate in tempi uguali sono uguali.***
Applicando la stessa analisi a intervalli di tempo sempre più brevi, si ottiene una traiettoria *ABCD*..., prossima quanto si vuole ad una curva piana, su cui sia l'inerzia che l'attrazione del Sole agiscono con continuità, producendo un moto orbitale in cui le aree spazzate in tempi uguali sono uguali. Questo risultato è stato ottenuto assumendo che le variazioni di velocità, vale a dire le forze, siano dirette verso il sole.

Si dimostra poi facilmente, usando la terza legge di Keplero, che variazioni di velocità (forze) così dirette devono variare come l'inverso del quadrato della distanza. Supponiamo che l'orbita sia semplicemente una circonferenza di raggio *R*. Allora il diagramma di Newton avrebbe questo aspetto:



La figura è un poligono regolare, con lati e angoli uguali fra loro, inscritto in una circonferenza che rappresenta l'orbita reale. A destra abbiamo disegnato il relativo diagramma delle velocità, nel quale le variazioni di velocità Δv risultano formare un poligono regolare simile al precedente, ma ruotato di 90°. Se si prendono intervalli di tempo sempre più brevi, i due diagrammi tendono alla circonferenza, come nelle due figure seguenti:



$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \qquad\qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}$$

Essendo la forza F proporzionale a $2\pi v/T$ e la velocità v uguale a $2\pi R/T$, scriviamo:

$$F \sim 2\pi v/T = (2\pi/T)\cdot(2\pi R/T) = 4\pi^2 R/T^2$$

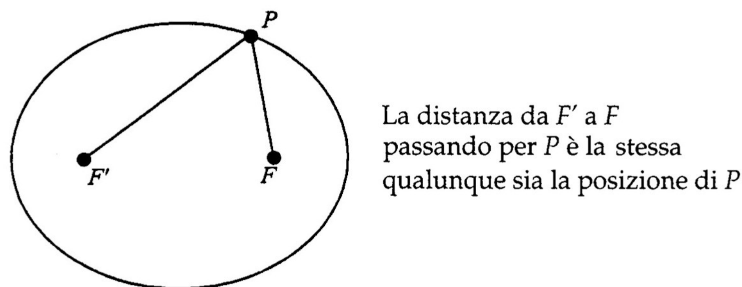
ed essendo, per la terza legge di Keplero: $T \sim R^{3/2}$ e quindi $T^2 \sim (R^{3/2})^2 = R^3$, si ha:

$$F \sim R/T^2 \sim R/R^3 = 1/R^2$$

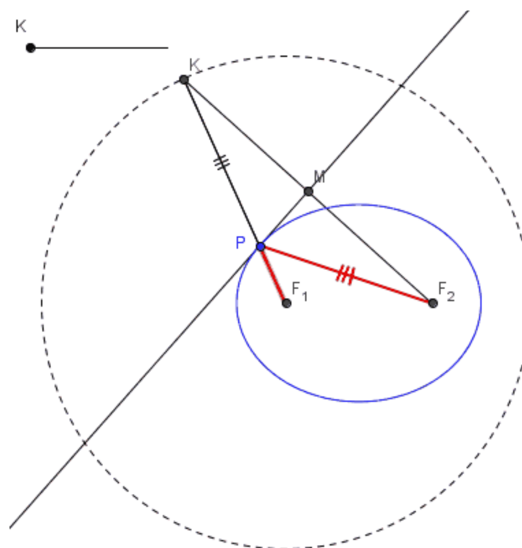
cioè, ***la forza è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal Sole.***

Sappiamo quindi che la forza di gravità esercitata dal Sole su un pianeta è diretta verso il Sole e che la sua intensità decresce come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole. Per determinare ciò, Newton ha fatto uso della seconda e della terza legge di Keplero. Il risultato finale, e il trionfo di Newton, è stato quello di dimostrare che una tale forza di gravità, operante nel rispetto delle sue leggi, conduce a *orbite ellittiche* per tutti i pianeti. Nel seguito dimostreremo questo fatto, mettendo da parte i *Principia* (2), ma seguendo un ragionamento geometrico-dinamico più semplice, dovuto al premio Nobel Richard Feynman.

Prima di proseguire, è utile qui ricordare la definizione geometrica dell'ellisse come: *luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi rimane costante.*



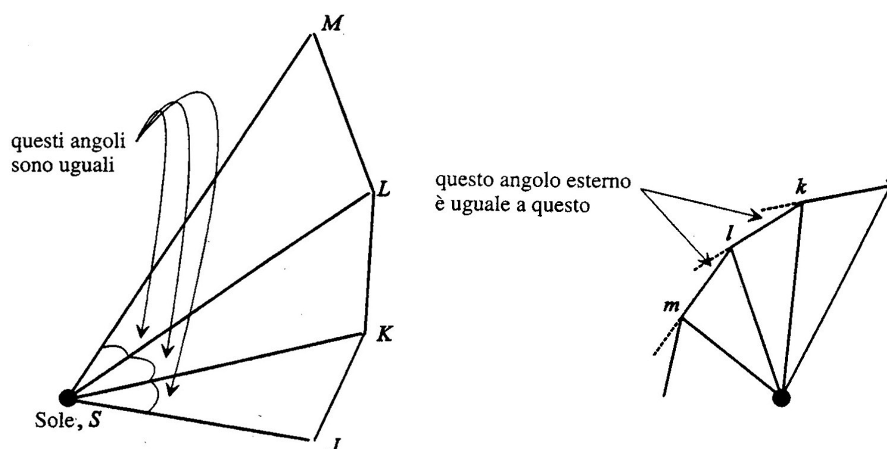
Di importanza centrale, nella dimostrazione di Feynman, è il seguente diagramma animato (che ho trovato su *Wikipedia)* che descrive la costruzione geometrica dell'ellisse col *metodo della tangente*:



(2) La dimostrazione di Newton è questa.

Il contributo di Feynman è consistito essenzialmente, come vedremo, nell’avere individuato, in questa figura, le opportune corrispondenze fra gli elementi geometrici e quelli meccanici del nostro problema.

Feynman ridisegna l'orbita con la sequenza dei punti *J, K, L, M, N,* che non corrispondono più a istanti separati da uguali intervalli di tempo, come nel diagramma di Newton, ma piuttosto a uguali angoli di inclinazione rispetto alla posizione di partenza.

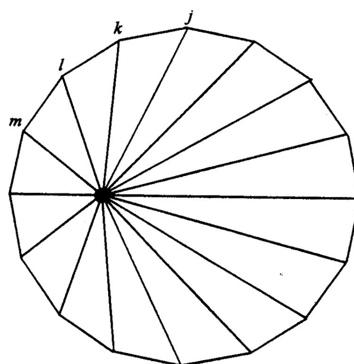


Angoli uguali vogliono dire che le aree dei tiangoli non sono uguali, ma che sono proporzionali al quadrato della distanza dal Sole [presi due triangoli qualsiasi, questi risultano simili (3), per cui le loro aree stanno fra loro come i quadrati delle rispettive dimensioni]. Quindi, dal momento che le aree sono proporzionali ai tempi, i tempi necessari a descrivere questi angoli uguali sono proporzionali al quadrato della distanza. Ora, poichè le variazioni di velocità in tempi uguali risultano inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal Sole, prendendo tempi proporzionali al quadrato della di distanza (angoli uguali) si ottengono variazioni di velocità tutte uguali.

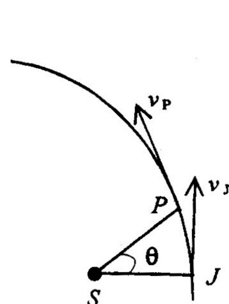
Analogamente a quanto fatto sopra, abbiamo inserito nella figura precedente il diagramma delle velocità, nel quale per costruzione risultano: *jk* parallelo a *KS*, *kl* parallelo a *LS*, *lm* parallelo a*MS*, $jk = kl = lm$, e gli angoli esterni fra questi ultimi sono uguali. Il diagramma completo delle velocità è un poligono regolare, con l’origine in posizione eccentrica.

---

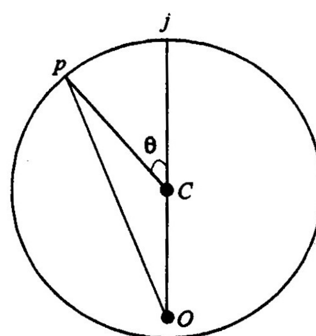
(3) Questa affermazione è evidentemente vera per una suddivisione in angoli *al Sole* infinitesimi, cioè al limite in cui la traiettoria diventa una curva ed i triangoli sono tutti *isosceli* con angoli corrispondenti uguali.



Dividendo l’orbita in un numero sempre più elevato di segmenti, il diagramma delle velocità si avvicina sempre più ad una circonferenza, con l’origine delle velocità in posizione eccentrica. A questo punto Feynman traccia i due diagrammi seguenti:



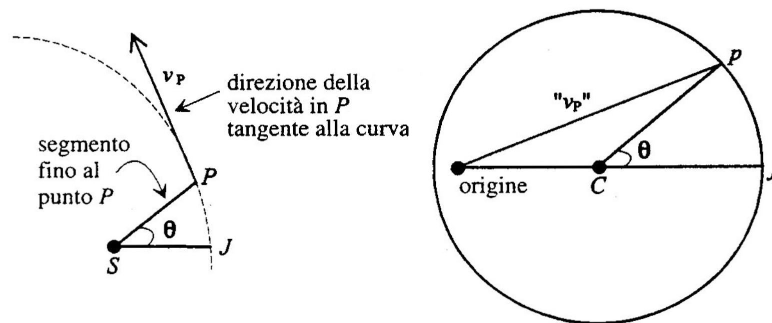
(diagramma dell’orbita)



(diagramma delle velocità)

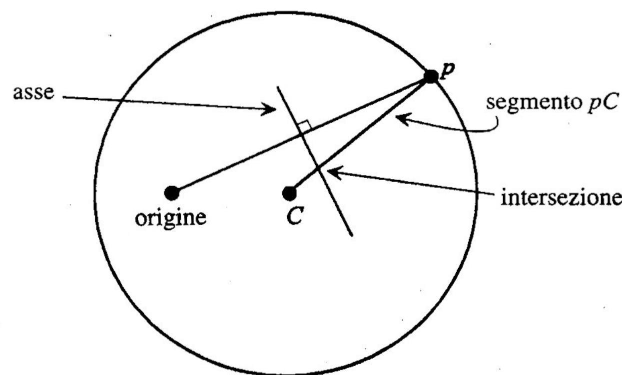
Sul diagramma dell’orbita, le velocità v_j e v_p sono tangenti alla curva nei punti J e P. Il diagramma delle velocità sarà una circonferenza, con l'origine eccentrica. Il punto J sul diagramma di Feynman è anche il punto più vicino al Sole, dove la velocità orbitale ha il valore più elevato. Il segmento che rappresenta v_j deve quindi passare per il centro della circonferenza, perché deve risultare il più lungo nel diagramma delle velocità. La velocità v_p è un segmento dall'origine O parallelo a v_p. Gli angoli *JSP* e *jCp* sono uguali a θ, perché i due diagrammi sono divisi nello stesso numero di angoli uguali. Così ad ogni angolo θ conosciamo la direzione della tangente all'orbita che cerchiamo di costruire.

Stabilite così tutte le corrispondenze tra i due diagrammi, Feynman passa alla costruzione dell’orbita, utilizzando il diagramma delle velocità. Per fare questo ruota il diagramma delle velocità di 90°, nel modo seguente:

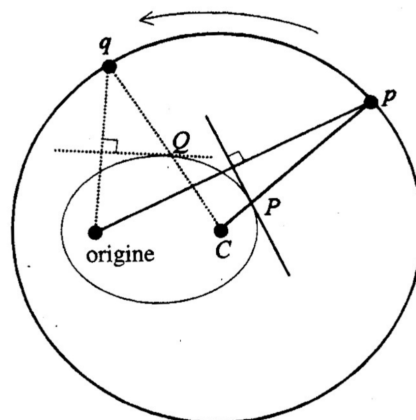


Ora le due orbite, quella a sinistra nella figura e quella da costruire sul diagramma delle velocità, risultano orientate allo stesso modo. In particolare, risultano ugualmente orientate: la direzione del segmento che unisce il Sole al punto P, e la direzione della tangente all'orbita in tale punto.

Per ottenere l'orbita, tracciamo l'asse del segmento *Op* che risulterà ora parallelo alla velocità v_p, tangente all'orbita nel punto P:



Ma del punto P conosciamo la direzione della retta di appartenenza, cioè la direzione del segmento *Cp*. Perciò l'intersezione dell'asse tracciato prima con *Cp*, godrebbe di tutte le proprieta (direzionali) del punto orbitale P in costruzione, per cui:



Mentre p si muove
sulla circonferenza fino a q,
l'intersezione da noi costruita
si muove da P a Q e così via,
dando origine all'orbita.

Ma questa costruzione è proprio quella che abbiamo mostrato nella precedente animazione, cioè la costruzione geometrica dell'ellisse col metodo della tangente. Perciò possiamo affermare di aver realizzato la *forma* dell'orbita che cercavamo, dimostrando che: ***la forza di gravità, agente nel rispetto delle leggi di Newton, genera orbite ellittiche per tutti i pianeti.***

Origini della dimostrazione di Feynman

La dimostrazione di Feynman non è nuova, essa apparve nel libro Matter and Motion, di [James Clerk Maxwell](), pubblicato nel 1877. Maxwell attribuì la dimostrazione a [Sir William Hamilton](), che fu il primo a fare uso del diagramma delle velocità (da lui chiamato [odografo]()) per studiare il moto di un corpo. Leggete le seguenti due pagine estratte dal suddetto libro di Maxwell e giudicate voi stessi.

108

133. KEPLER'S SECOND LAW

Law II.—The orbit of a planet with respect to the sun is an ellipse, the sun being in one of the foci.

Let $APQB$ (fig. 16) be the elliptic orbit. Let S be the sun in one focus, and let H be the other focus. Produce SP to U, so that SU is equal to the transverse axis AB, and join HU, then HU will be proportional and perpendicular to the velocity at P.

For bisect HU in Z and join ZP; ZP will be a tangent to the ellipse at P; let SY be a perpendicular from S on this tangent.

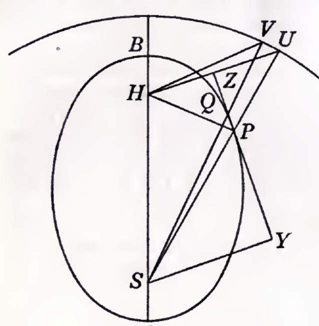


Fig. 16.

If v is the velocity at P, and h twice the area swept out in unit of time, $h = vSY$.

Also if b is half the conjugate axis of the ellipse

$$SY.HZ = b^2.$$

Now $$HU = 2HZ;$$

hence $$v = \frac{1}{2}\frac{h}{b^2}HU.$$

Hence HU is always proportional to the velocity, and it is perpendicular to its direction. Now SU is always equal to AB. Hence the circle whose centre is S and radius AB is the hodograph of the planet, H being the origin of the hodograph.

The corresponding points of the orbit and the hodograph are those which lie in the same straight line through S.

109

Thus P corresponds to U and Q to V.

The velocity communicated to the body during its passage from P to Q is represented by the geometrical difference between the vectors HU and HV, that is, by the line UV, and it is perpendicular to this arc of the circle, and is therefore, as we have already proved, directed towards S.

If PQ is the arc described in [a very small] time, then UV represents the acceleration [of velocity in that time;] and since UV is on a circle whose centre is S, UV will be a measure of the angular [movement in that time] of the planet about S. Hence the acceleration is proportional to the angular velocity, and this by Art. 129 is inversely as the square of the distance SP. Hence the acceleration of the planet is in the direction of the sun, and is inversely as the square of the distance from the sun.

This, therefore, is the law according to which the attraction of the sun on a planet varies as the planet moves in its orbit and alters its distance from the sun.